CS 05 Spécialité maths **Mardi 23 janvier 2024** **Gr Thiaude P.**
Calculatrice autorisée en mode EXAMEN **durée = 40 min**

<u>Exercice 1</u> [10 pts : 3 pts + 7 pts]

Pour tout réel x, on pose :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x_A = \frac{1}{2}$.

1. En présentant le détail des calculs donner la valeur de y_A sous forme de fraction irréductible.
2. Démontrer que A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

<u>Exercice 2</u> [10 pts : 2 pts + 2 pts + 2 pts + 4 pts]

<u>Problématique</u>

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{2x} + x^2 - 2x - 1$: on cherche à étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie A Étude informatique

Le programme suivant écrit en Python est une étude du signe de $g(x)$ pour les valeurs décimales de x s'écrivant avec trois chiffres après la virgules et appartenant à l'intervalle $[-100; 100]$:

```
01 from math import *
02 def g(x:float):
03     return exp(2*x)+x**2-2*x-1
04 x=-100
05 flag=0
06 while x<=100:
07     if g(x)<0:
08         flag=1
09     x=x+0.001
10 if 
11     print("g(x) semble être positif ou nul sur [-100;100]")
12 else:
13     print("il existe x dans [-100;100] tel que g(x)<0")
```

Écrire <u>sur la copie</u> la ligne numéro 10.

Partie B Étude mathématique

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{2x} + x^2$, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle.
3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$, en déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

Exercice 1

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{2}$.

1. **Donner la valeur de y_A sous forme de fraction irréductible.**

   $A \in \mathcal{C}_f$ donc $y_A = f(x_A)$, or $x_A = \frac{1}{2}$ donc :

$$y_A = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{24} - \frac{3}{24} - \frac{12}{24} + \frac{48}{24}$$
$$= \frac{34}{24} = \frac{2 \times 17}{2 \times 12} = \frac{17}{12}$$

   Finalement :

$$\boldsymbol{y_A = \frac{17}{12}}$$

2. • f est une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 - \frac{1}{2} \times 2x - 1$$
$$f'(x) = x^2 - x - 1$$

   • f' est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f''(x) = 2x - 1$$

   On a les équivalences :

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

   Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

   On en déduit que :

   • f'' est négative ou nulle sur l'intervalle $]-\infty; 0{,}5]$ donc f est concave sur cet intervalle,

   • f'' est positive ou nulle sur l'intervalle $[0{,}5; +\infty[$ donc f est convexe sur cet intervalle.

   Par conséquent f change de convexité en $\frac{1}{2}$ donc le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $\frac{1}{2}$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

   Or, le point de $\mathcal{C}_f$ est A donc **A est bien un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$**.

Exercice 2

Problématique

$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = e^{2x} + x^2 - 2x - 1$: on cherche à étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie A

ligne 10 on doit taper :

```
if flag==0:
```

Partie B

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{2x} + x^2$

1. **Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.**

   f est composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$

   $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{2x} + x^2$

   Rappel : $(e^u)' = u'e^u$ et $(x^2)' = 2x$

   avec $u(x) = 2x$ donc $u'(x) = 2$

   donc : $f'(x) = 2e^{2x} + 2x$

   f' est composée et somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

   $f''(x) = 2 \times 2e^{2x} + 2$

   $f''(x) = 4e^{2x} + 2$

   Conclusion

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2e^{2x} + 2x$ et $f''(x) = 4e^{2x} + 2$.

2. **Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle.**

   La tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle admet pour équation :

   $$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

   Or,

   $f'(0) = 2e^{2(0)} + 2(0) = 2e^0 + 0 = 2 \times 1 = 2$ et $f(0) = e^{2(0)} + 0^2 = e^0 + 0 = 1$

   donc la tangente T admet pour équation : $y = 2(x - 0) + 1$, i.e. : $y = 2x + 1$.

   L'équation réduite de la tangente T est : $\boldsymbol{y = 2x + 1}$.

3. **Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}$.**

   On a montré en **1.** que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = 4e^{2x} + 2$.

   Or, pour tout $X \in \mathbb{R}$, $e^X > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$.

   Comme $4 > 0$ et $2 > 0$ on en déduit : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

   En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

   f est convexe sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes sur $\mathbb{R}$, en particulier $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente T sur $\mathbb{R}$, par conséquent pour tout réel x :

   $$\begin{aligned} e^{2x} + x^2 &\geqslant 2x + 1 \\ e^{2x} + x^2 - 2x - 1 &\geqslant 0 \\ g(x) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

   donc pour tout réel x, $g(x)$ est positif ou nul.